

# Limite de diffusion linéaire pour un système déterministe de sphères dures

T. Bodineau<sup>a</sup>, I. Gallagher<sup>b</sup> L. Saint-Raymond<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*CNRS & École Normale Supérieure, Département de Mathématiques et Applications*

<sup>b</sup>*Université Paris-Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu*

<sup>c</sup>*Université Pierre et Marie Curie & École Normale Supérieure, Département de Mathématiques et Applications*

Reçu le \*\*\*\*\* ; accepté après révision le ++++++

Présenté par Jean-Pierre Kahane

---

## Résumé

Cette note montre comment on peut obtenir le mouvement brownien comme limite hydrodynamique d'un système déterministe de sphères dures quand le nombre de particules  $N$  tend vers l'infini et que leur diamètre  $\varepsilon$  tend vers 0, dans la limite de relaxation rapide  $N\varepsilon^{d-1} \rightarrow \infty$  (avec un choix d'échelles de temps et d'espace convenable). Comme suggéré par Hilbert dans son sixième problème, on utilise la théorie cinétique de Boltzmann comme niveau de description intermédiaire. La preuve suit les idées fondamentales de Lanford sur la propagation du chaos. La principale nouveauté consiste à obtenir des estimations sur les arbres de collision pathologiques par une étude fine du processus de branchement.

## Abstract

**Linear diffusive limit of deterministic systems of hard spheres.** We provide a rigorous derivation of the brownian motion as the hydrodynamic limit of a deterministic system of hard-spheres as the number of particles  $N$  goes to infinity and their diameter  $\varepsilon$  simultaneously goes to 0, in the fast relaxation limit  $N\varepsilon^{d-1} \rightarrow \infty$  (with a suitable scaling of the observation time and length). As suggested by Hilbert in his sixth problem, we use Boltzmann's kinetic theory as an intermediate level of description for the gas close to global equilibrium. Our proof relies on the fundamental ideas of Lanford. The main novelty is the detailed study of the branching process, leading to explicit estimates on pathological collision trees.

---



---

*Email addresses:* [Thierry.Bodineau@ens.fr](mailto:Thierry.Bodineau@ens.fr) (T. Bodineau), [gallagher@math.univ-paris-diderot.fr](mailto:gallagher@math.univ-paris-diderot.fr) (I. Gallagher), [Laure.Saint-Raymond@ens.fr](mailto:Laure.Saint-Raymond@ens.fr) (L. Saint-Raymond).

## 1. Introduction

Le sixième problème présenté par Hilbert au Congrès International des Mathématiciens en 1900 concerne l'axiomatisation de la physique, et plus précisément la description mathématique de la consistance entre les modèles atomiques et les modèles continus de la dynamique des gaz. De façon un peu plus restrictive (puisque seuls les gaz parfaits peuvent être appréhendés dans cette approche), Hilbert suggère d'utiliser l'équation cinétique de Boltzmann comme étape intermédiaire pour comprendre l'apparition de l'irréversibilité et des mécanismes de diffusion [11] :

*“ Quant aux principes de la Mécanique, nous possédons déjà au point de vue physique des recherches d'une haute portée ; je citerai, par exemple, les écrits de MM. Mach, Hertz, Boltzmann et Volkmann. Il serait aussi très désirable qu'un examen approfondi des principes de la Mécanique fût alors tenté par les mathématiciens. Ainsi le Livre de M. Boltzmann sur les Principes de la Mécanique nous incite à établir et à discuter au point de vue mathématique d'une manière complète et rigoureuse les méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, et qui de la conception atomique nous conduisent aux lois du mouvement des continua. Inversement on pourrait, au moyen de méthodes basées sur l'idée de passage à la limite, chercher à déduire les lois du mouvement des corps rigides d'un système d'axiomes reposant sur la notion d'états d'une matière remplissant tout l'espace d'une manière continue, variant d'une manière continue et que l'on devra définir paramétriquement.*

*Quoi qu'il en soit, c'est la question de l'équivalence des divers systèmes d'axiomes qui présentera toujours l'intérêt le plus grand quant aux principes.”*

Une littérature importante est consacrée à ces problèmes d'analyse asymptotique, mais ils restent à ce jour encore très ouverts.

Les travaux fondamentaux de DiPerna et Lions sur les solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann [8] ont permis d'obtenir une étude complète de certaines limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann, en particulier dans le régime incompressible visqueux conduisant aux équations de Navier-Stokes ([1,10]).

A ce stade, le principal obstacle semble donc être lié à l'autre étape, c'est-à-dire à l'obtention de l'équation de Boltzmann à partir de systèmes de particules : le résultat le plus général concernant cette limite de faible densité, qui est dû à Lanford dans le cas des sphères dures [15] (voir aussi [6,19,9], pour une preuve complète) n'est en effet valable que pour des temps très courts, ce qui ne permet pas d'observer une quelconque relaxation.

### 1.1. L'équation de Boltzmann, un modèle intermédiaire

L'état d'un gaz monoatomique (constitué de particules indiscernables) peut être caractérisé par sa fonction de distribution  $f$ , où  $f(t, x, v)$  est la densité associée à la probabilité de trouver une particule de position  $x$  et de vitesse  $v$  à l'instant  $t$ . Cette fonction ne se mesure pas, mais permet de calculer les observables (telles que la température  $\Theta$  ou la vitesse d'écoulement  $U$ ) en prenant des moyennes :

$$R(t, x) := \int f(t, x, v) dv, \quad U(t, x) := \frac{1}{R(t, x)} \int v f(t, x, v) dv,$$
$$\Theta(t, x) := \frac{1}{3R(t, x)} \int f(t, x, v) |v - U(t, x)|^2 dv.$$

Dans le vide et en l'absence d'interactions, les particules ont un mouvement rectiligne et uniforme. La distribution  $f$  satisfait alors l'équation de transport libre

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0.$$

Ici on va supposer que les particules - qui sont de taille négligeable - interagissent par contact, et que ces collisions sont élastiques (i.e. préservent la quantité de mouvement et l'énergie). Une analyse très similaire mais techniquement plus difficile permettrait en fait de considérer des interactions hamiltoniennes décrites par un potentiel à support compact ([13,9]). Sous l'effet combiné du transport et des collisions, la distribution  $f$  des particules évolue alors selon l'équation intégral-différentielle suivante, dite **équation de Boltzmann non linéaire**

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= Q(f, f), \\ Q(f, f)(v) &:= \int \left( f(v')f(v'_1) - f(v)f(v_1) \right) ((v - v_1) \cdot \omega)_+ dv_1 d\omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Comme les collisions sont élastiques, les vitesses pré-collisionnelles  $(v', v'_1)$  vérifient

$$v' + v'_1 = v + v_1, \quad |v'|^2 + |v'_1|^2 = |v|^2 + |v_1|^2,$$

et peuvent être paramétrisées par l'angle de déflexion  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$v'_1 := v_1 + ((v - v_1) \cdot \omega) \omega, \quad v' := v - ((v - v_1) \cdot \omega) \omega.$$

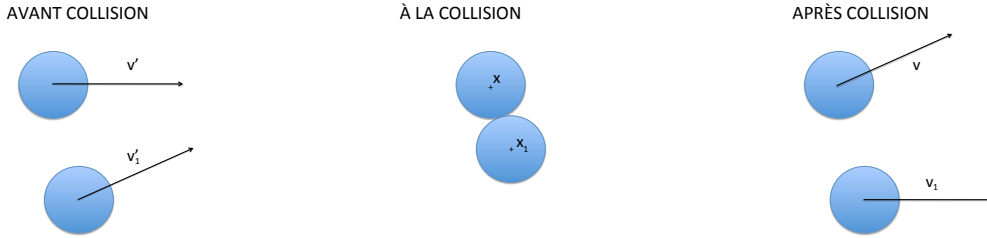


FIGURE 1. Collision de sphères dures

cause de l'indiscernabilité des particules,  $v$  et  $v_1$  jouent des rôles symétriques dans l'intégrale de collision. La réversibilité du mécanisme élémentaire de collision implique de plus que le changement de variables  $(v', v'_1) \rightarrow (v, v_1)$  est de jacobien 1, de sorte que

$$\int Q(f, f) \varphi(v) dv = \frac{1}{4} \int [f(v')f(v'_1) - f(v)f(v_1)] (\varphi(v) + \varphi(v_1) - \varphi(v') - \varphi(v'_1)) ((v - v_1) \cdot \omega)_+ dv dv_1 d\omega.$$

En particulier, en choisissant  $\varphi(v) = 1$ , puis  $\varphi(v) = v$  et  $\varphi(v) = |v|^2$ , on obtient formellement les conservations de la masse, de l'impulsion et de l'énergie

$$\begin{aligned} \partial_t R + \nabla_x \cdot (RU) &= 0, \\ \partial_t (RU) + \nabla_x \cdot \int f v \otimes v dv &= 0, \\ \partial_t (RU^2 + 3R\Theta) + \nabla_x \cdot \int f |v|^2 v dv &= 0. \end{aligned}$$

## 1.2. Entropie, irréversibilité et relaxation vers l'équilibre

En prenant  $\varphi = \log f$  dans l'identité précédente, on obtient aussi  $D(f) := - \int Q(f, f) \log f(v) \geq 0$ , d'où l'on déduit l'inégalité d'entropie, aussi appelée théorème H de Boltzmann,

$$\int f \log f(t, x, v) dx dv + \int_0^t \int D(f)(s, x) ds dx \leq \int f_0 \log f_0(x, v) dx dv.$$

Cela signifie que l'équation de Boltzmann décrit une **évolution irréversible**.

Les maxima de l'entropie à masse, impulsion et énergie fixées sont donnés formellement par le théorème d'optimisation sous contrainte de Lagrange

$$\log f(v) = \alpha + \beta \cdot v + \gamma |v|^2.$$

En d'autres termes, les distributions d'équilibre sont des Gaussiennes, ce qui est conforme à la prédiction de Maxwell. On s'attend à ce que l'équation de Boltzmann prédise une **relaxation vers ces équilibres**.

Ces deux caractéristiques de la dynamique de Boltzmann montrent que la description statistique n'est pas tout-à-fait équivalente à la description microscopique. En effet,

- l'entropie croît alors que les équations de la mécanique sont réversibles (paradoxe de Loschmidt) ;
- la relaxation est incompatible avec le théorème de Poincaré qui prédit une récurrence pour le système de  $N$  sphères dures (paradoxe de Zermelo).

Obtenir l'équation de Boltzmann à partir de la mécanique de Newton nécessite donc de comprendre l'origine de l'irréversibilité, irréversibilité qui est aussi cruciale pour les limites de diffusion.

## 2. Résultats de convergence

Les travaux de Grad montrent que la mesure empirique associée au système de  $N$  sphères satisfait une équation collisionnelle similaire à l'équation de Boltzmann, c'est-à-dire où le transport et les collisions sont deux phénomènes qui s'équilibrent, si le nombre de particules  $N$  tend vers l'infini, et leur diamètre  $\varepsilon$  tend simultanément vers 0, avec le choix d'échelles de Boltzmann-Grad  $N\varepsilon^{d-1} \sim 1$ . Le point à noter est que l'opérateur de collision porte sur la probabilité jointe de trouver deux particules collisionnelles, qui en général ne s'exprime pas en fonction de la densité de probabilité à une particule.

La validité de l'équation de Boltzmann est donc liée à une propriété d'indépendance des particules collisionnelles, que l'on appelle souvent "chaos". Le théorème de Lanford [15] (voir aussi [9] pour une preuve complète) établit la propagation du chaos asymptotiquement dans le scaling de Grad : plus précisément, il montre que la fonction de distribution du système de particules est bien approchée par la solution de l'équation de Boltzmann non linéaire, avec une erreur qui tend vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ , pour un ensemble de configurations initiales dont la probabilité tend vers 1 quand  $N \rightarrow \infty$ .

Comme on a déjà mentionné dans l'introduction, le principal défaut de ce résultat est qu'il n'est valable qu'en temps très court, estimé à une fraction du temps au bout duquel une particule marquée subit une collision. En particulier, il est inutilisable pour décrire les limites de relaxation rapide. Il faut noter que cette limitation n'est pas seulement liée à la méthode de preuve, mais au fait que la théorie  $L^\infty$  de l'équation de Boltzmann est locale. Définir des solutions globales pour l'équation de Boltzmann nécessite soit d'utiliser des techniques de renormalisation [8], soit de considérer des fluctuations autour d'un état d'équilibre.

### 2.1. L'équation de Boltzmann linéaire et le mouvement brownien

Au niveau microscopique, la notion d'équilibre est reliée à l'existence d'une mesure invariante pour le système de  $N$  sphères : en notant  $Z_N := (X_N, V_N) := (x_1, \dots, x_N, v_1, \dots, v_N) \in \mathbf{T}_\lambda^{dN} \times \mathbf{R}^{dN}$ , où  $\mathbf{T}_\lambda := \mathbf{R}/(\lambda\mathbf{Z})$  pour  $\lambda \geq 1$ , on définit la mesure de Gibbs

$$M_{N,\beta}(Z_N) := \bar{\mathcal{Z}}_N^{-1} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N}(Z_N) \prod_{i=1}^N M_\beta(v_i), \quad \text{avec} \quad M_\beta(v) := \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}|v|^2\right)$$

où  $\mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N}$  code l'exclusion

$$\mathcal{D}_\varepsilon^N := \{Z_N \in \mathbf{T}_\lambda^{dN} \times \mathbf{R}^{dN} / \forall i \neq j, \quad |x_i - x_j| > \varepsilon\}$$

et où  $\bar{\mathcal{Z}}_N$  est le facteur de normalisation :

$$\bar{\mathcal{Z}}_N := \int \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N}(X_N) dX_N.$$

Une première notion de fluctuation, assez naturelle du point de vue probabiliste, consiste à étudier la **dynamique d'une particule marquée** dans le gaz globalement à l'équilibre. Plus précisément, on considère un système de  $N$  sphères dures sur  $\mathbf{T}_\lambda^d$ , distribuées initialement selon la probabilité

$$f_N^0(Z_N) := \mathcal{Z}_N^{-1} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N}(Z_N) \varphi_\lambda^0(Z_1) \prod_{i=1}^N M_\beta(v_i), \quad \text{avec} \quad \mathcal{Z}_N := \int \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N}(Z_N) \varphi_\lambda^0(Z_1) \prod_{i=1}^N M_\beta(v_i) dZ_N \quad (2)$$

où  $\varphi_\lambda^0$  est une fonction Lipschitzienne de  $\mathbf{T}_\lambda^d \times \mathbf{R}^d$  telle que

$$\varphi_\lambda^0(z) \leq \mu_\lambda, \quad \int_{\mathbf{T}_\lambda^d \times \mathbf{R}^d} M_\beta(v) \varphi_\lambda^0(z) dz = 1, \quad (3)$$

ce qui signifie que l'on a spécifié l'état de la particule 1 à l'instant initial.

Dans ce régime, on s'attend à ce que la densité moyenne des particules ne soit pas affectée par la perturbation initiale (avec une erreur en  $O(1/N)$ ), et que les collisions de la particule 1 soient régies par un processus linéaire. La distribution  $M_\beta \varphi$  de la particule 1 doit alors satisfaire approximativement l'équation de Boltzmann linéaire [3,16] :

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi &= \mathcal{L} \varphi, \\ \mathcal{L} \varphi(v) &:= \frac{1}{M_\beta(v)} \int \left( M_\beta(v'_1) M_\beta(v') \varphi_\lambda(v') - M_\beta(v_1) M_\beta(v) \varphi_\lambda(v) \right) ((v - v_1) \cdot \omega)_+ d\omega dv_1 \end{aligned} \quad (4)$$

L'article [4] montre que cette approximation est valable sur un temps suffisamment long pour étudier la limite de diffusion.

**Théorème 2.1** *Soit la dynamique sur  $\mathbf{T}_\lambda^d \times \mathbf{R}^d$  de  $N$  sphères dures distribuées initialement selon (2)-(3).*

- *Alors, la distribution  $\lambda^d f_N^{(1)}(\lambda^2 \tau, \lambda y, v)$  de la particule marquée est proche de la solution de l'équation de Boltzmann linéaire*

$$\partial_\tau \varphi_\lambda + \lambda v \cdot \nabla_y \varphi_\lambda = \lambda^2 \mathcal{L} \varphi_\lambda \quad \text{dans } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d \quad (5)$$

*de donnée initiale  $\varphi_\lambda^0$ , au sens où pour tout  $\delta > 1$ , on a dans la limite  $N\varepsilon^{d-1}\lambda^{-d} \equiv 1$*

$$\left\| \lambda^d f_N^{(1)}(\lambda^2 \tau, \lambda y, v) - M_\beta \varphi_\lambda(\tau, y, v) \right\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d)} \leq C \mu_\lambda \frac{(\lambda^2 T)^\delta}{(\log \log N)}. \quad (6)$$

- *En particulier, si*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^d \int M_\beta(v) \varphi_\lambda^0(\lambda y, v) dv = \rho_0(y) \quad \text{dans } L^1(\mathbf{T}^d),$$

la distribution  $\lambda^d f_N^{(1)}(\lambda^2 \tau, \lambda y, v)$  converge au sens des mesures, quand  $\lambda$  tend vers l'infini (beaucoup moins vite que  $(\log \log N)^{1/2}$ ), vers la solution  $\rho(\tau, y) M_\beta(v)$  de l'équation de la chaleur linéaire

$$\partial_\tau \rho - \kappa \Delta_y \rho = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{T}^d, \quad \rho|_{\tau=0}(y) = \rho_0(y) \quad \text{avec} \quad \kappa := \int_{\mathbf{R}^d} v \mathcal{L}^{-1} v M_\beta(v) dv. \quad (7)$$

Et le processus  $\Xi(\tau) = \frac{1}{\lambda} x_1(\lambda^2 \tau)$  converge en loi vers un mouvement brownien de variance  $\kappa$  initialement distribué sous la mesure  $\rho_0$ .

La limite de diffusion de l'équation de Boltzmann linéaire (5) ne pose pas de difficulté particulière [2,14] : l'équation de la chaleur s'obtient par développement asymptotique, et la convergence par une simple estimation d'énergie. La principale difficulté ici est donc d'obtenir l'approximation du système de sphères dures par l'équation de Boltzmann linéaire en temps long. A noter qu'ici, contrairement aux études de la diffusion à partir du gaz de Lorentz [18], on suppose que toutes les particules ont une dynamique et interagissent entre elles.

Le point clé de la preuve consiste à montrer qu'on peut "itérer" l'argument de Lanford, en utilisant les contrôles globaux fournis par le principe du maximum et une comparaison avec la mesure invariante.

Notons que le théorème peut aisément être étendu au cas où la donnée initiale (2) s'écrit

$$f_N^0(Z_N) := Z_N^{-1} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N}(Z_N) \varphi_\lambda^0(Z_s) \prod_{i=1}^N M_\beta(v_i),$$

avec  $s$  fini, ce qui correspond à modifier la distribution d'un nombre fini de particules.

## 2.2. Généralisation à l'équation de Boltzmann linéarisée et les équations de Stokes incompressibles

Une généralisation naturelle du théorème précédent serait d'obtenir les équations de Stokes incompressibles en passant par l'équation de Boltzmann linéarisée. Avec la notion précédente de fluctuation, seul un très petit nombre de particules voient leur densité affectée par la perturbation initiale : en particulier, cette perturbation n'a aucun effet sur la densité moyenne. Par conséquent, on ne suit pas la rétroaction des particules marquées sur le fond, et la dynamique macroscopique se réduit à une équation sur la densité.

Afin d'obtenir l'équation de Boltzmann linéarisée

$$\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi = \int M_\beta(v_1) (\varphi(v') + \varphi(v'_1) - \varphi(v) - \varphi(v_1)) ((v - v_1) \cdot \omega)_+ d\omega dv_1 \quad (8)$$

il faut perturber la mesure d'équilibre de façon symétrique, avec des **fluctuations de très petite taille**. On se ramène alors après changement d'échelle à étudier la dynamique sur  $\mathbf{T}_\lambda^d \times \mathbf{R}^d$  de  $N$  sphères dures distribuées initialement selon

$$f_N^0(Z_N) := Z_N^{-1} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N}(Z_N) \left( \sum_{i=1}^N \varphi^0(z_i) \right) \prod_{i=1}^N M_\beta(v_i) \text{ de sorte que } \int \frac{(f_N^0)^2}{M_N} dZ_N \leq C_\lambda N.$$

La limite de diffusion de l'équation de Boltzmann linéarisée vers la solution  $M_\beta(\rho + u \cdot v + \theta \frac{|v|^2 - 3}{2})$  des équations de Stokes incompressibles

$$\begin{aligned} \partial_\tau \theta - \kappa \Delta_y \theta &= 0, \quad \nabla_y (\rho + \theta) = 0, \\ \partial_\tau u - \mu \Delta_y u + \nabla_y p &= 0, \quad \nabla_y \cdot u = 0, \end{aligned} \quad \text{sur } \mathbf{R}^+ \times \mathbf{T}^d$$

est maintenant bien comprise [1]. En revanche la limite du système de sphères dures vers l'équation de Boltzmann linéarisée reste un problème en cours d'étude [5], en raison de la difficulté à étendre l'analyse de Lanford dans un cadre fonctionnel qui est typiquement  $L^2$  et non plus  $L^\infty$ , dans lequel la notion de trace est beaucoup moins naturelle.

*Remarque 1* : Il est important de noter (voir par exemple [3]) que l'équation de Boltzmann non linéaire (1), l'équation de Boltzmann linéaire (4) et l'équation de Boltzmann linéarisée (8) sont trois fermetures différentes de la même hiérarchie infinie, obtenue en passant formellement à la limite dans la hiérarchie BBGKY (9). La relation de fermeture est entièrement prescrite par la donnée initiale.

### 3. Recollisions et propagation du chaos

#### 3.1. Représentation par des arbres de collisions

La preuve originelle de Lanford [15] est assez descriptive. L'idée est de caractériser la position et la vitesse d'une particule à un instant donné en décrivant son arbre de collisions jusqu'à cet instant  $t$ , et la configuration initiale de toutes les particules appartenant à cet arbre.

Le point de départ est l'équation de Liouville qui traduit les équations de la dynamique microscopique en terme de probabilité sur l'espace des configurations à  $N$  particules. Pour des sphères dures, elle s'écrit simplement

$$\partial_t f_N + \sum_i v_i \cdot \nabla_{x_i} f_N = 0 \text{ sur } \mathcal{D}_\varepsilon^N$$

avec condition de réflexion spéculaire sur le bord du domaine (correspondant à un rebond élastique). La formule de Green montre alors que pour tout  $s < N$ , la marginale d'ordre  $s$

$$f_N^{(s)}(t, Z_s) := \int f_N(t, Z_N) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N}(Z_N) dz_{s+1} \dots dz_N$$

satisfait l'équation

$$(\partial_t + \sum_{i=1}^s v_i \cdot \nabla_{x_i}) f_N^{(s)}(t, Z_s) = (C_{s,s+1} f_N^{(s+1)})(t, Z_s) \text{ sur } \mathcal{D}_\varepsilon^s, \quad (9)$$

où le terme de collision est défini par

$$(C_{s,s+1} f_N^{(s+1)})(Z_s) := (N-s)\varepsilon^{d-1} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} f_N^{(s+1)}(Z_s, x_i + \varepsilon\omega, v_{s+1})(v_{s+1} - v_i) \cdot \omega d\omega dv_{s+1}.$$

Ce système de  $N$  équations couplées est appelé hiérarchie BBGKY (d'après Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon [15,6]). La première équation ( $s = 1$ ) est assez semblable à l'équation de Boltzmann, mais elle ne se découple du reste de la hiérarchie que dans le cas où **les particules collisionnelles sont indépendantes**.

La représentation par des arbres de collision s'obtient en introduisant les opérateurs de transport  $\mathbf{S}_s$  à  $s$  particules dans  $\mathcal{D}_\varepsilon^s$  et de scattering, et en intégrant la hiérarchie avec la formule de Duhamel

$$f_N^{(s)}(t) = \sum_{n=0}^{N-s} Q_{s,s+n}(t) f_N^{(s+n)}(0)$$

où l'on a défini

$$Q_{s,s+n}(t) := \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathbf{S}_s(t-t_1) C'_{s,s+1} \mathbf{S}_{s+1}(t_1-t_2) C'_{s+1,s+2} \dots \mathbf{S}_{s+n}(t_n) dt_n \dots dt_1.$$

Chaque terme de la somme peut alors être associé à une pseudo-dynamique définie de façon récursive

- les  $s+i$  particules sont transportées (dans le sens des temps décroissants) entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  ;
- une particule supplémentaire est “adjointe” au système au temps  $t_{i+1}$ .

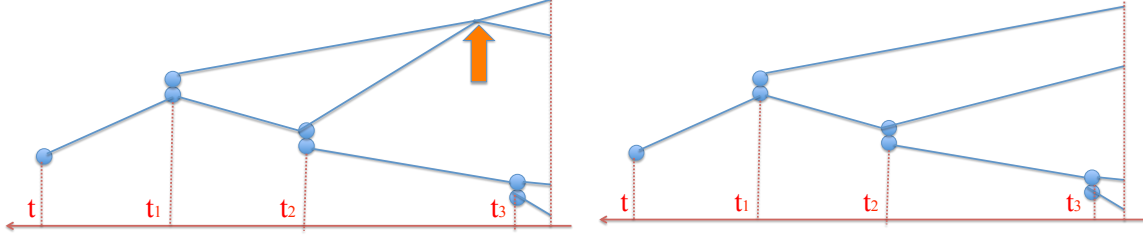


FIGURE 2. Arbres de collision avec et sans recollision

Les opérateurs de transport  $\mathbf{S}_{s+i}$  coïncident avec le transport libre si et seulement si il n’y a pas de recollision. Autrement dit, les solutions de l’équation de Boltzmann donnent une bonne approximation de la hiérarchie BBGKY tant qu’il n’y a pas recollision. La preuve de convergence consiste donc à montrer que les recollisions sont de probabilité asymptotiquement nulle quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 3.2. Lemmes géométriques

La démonstration proposée dans [9] est itérative : on définit les “bonnes configurations”

$$\{Z_k \in \mathbf{T}_\lambda^{dk} \times \mathbf{R}^{dk} / \forall s \in [0, t], \quad \forall i \neq j, \quad d(x_i - sv_i, x_j - sv_j) \geq \varepsilon_0\},$$

où  $d$  est la distance sur le tore  $\mathbf{T}_\lambda^d$  et  $\varepsilon_0 \gg \varepsilon$ . Et on montre que ces bonnes configurations sont stables par adjonction d’une particule pourvu qu’on exclue un petit ensemble de vitesses et d’angles de déflexion dits pathologiques.

Une étude géométrique du transport libre permet de contrôler la taille de cet ensemble en fonction de  $\varepsilon$  et de  $s$ . L’estimation élémentaire pour chaque paire de particules est la suivante :

**Lemme 3.1** *Soient deux positions  $x_1, x_2 \in \mathbf{T}_\lambda^d$  telles que  $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0 \gg \varepsilon$ , et une vitesse  $v_1$  telle que  $|v_1| \leq E < \infty$ . Pour  $\delta, t > 0$  donnés, il existe un ensemble  $K(x_1 - x_2)$  de mesure petite*

$$|K(x_1 - x_2)| \leq CE^d \left( \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{d-1} + \left( \frac{\varepsilon_0}{E\delta} \right)^{d-1} + \left( \frac{Et}{\lambda} \right)^d \left( \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \right)^{d-1} \right)$$

tel que pour toute vitesse  $v_2 \notin (v_1 + K(x_1 - x_2))$ , avec  $|v_2| \leq E$ ,

- (i) il n’y a **pas de collision** sur  $[0, t]$  par le flot inverse : pour tout  $s > 0$ ,  $d(x_1 - v_1s, x_2 - v_2s) > \varepsilon$  ;
- (ii) on est à nouveau dans une **bonne configuration après un temps  $\delta$**  : pour tout  $s > \delta$ ,  $d(x_1 - v_1s, x_2 - v_2s) > \varepsilon_0$ .

Dans le cas de l’espace entier, l’ensemble  $K$  est essentiellement la réunion d’un cône et d’un cylindre (intersectés avec la boule de rayon  $E$ ). Ici à cause de la périodicité du domaine, il apparaît un troisième terme dans l’estimation. On notera que ce lemme n’a pas d’analogue simple dans le cas des domaines à bords.



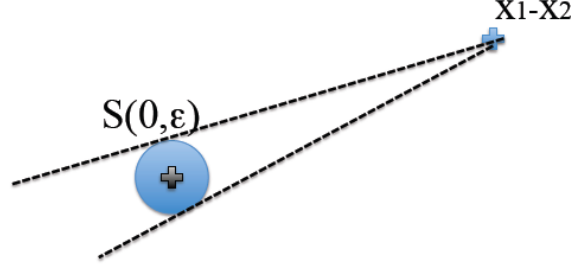


FIGURE 3. Cône des vitesses donnant une recollision (violation de la condition (i))

Pour redresser les trajectoires et se ramener au transport libre, on modifie alors successivement chaque opérateur de collision en enlevant l'ensemble pathologique du domaine d'intégration : on doit donc répéter l'opération environ  $n(s+n)$  fois pour l'opérateur  $Q_{s,s+n}$ .

#### 4. Contrôle du processus de branchement pour une particule marquée

Cet algorithme de redressement n'est admissible que si les arbres de collision sont assez petits (avec un nombre  $n$  de points de branchement au plus de l'ordre de  $\log N$ ). Pour des données initiales assez générales, la taille des arbres est contrôlée par une estimation de type Cauchy-Kowalewski pour la hiérarchie BBGKY, ce qui explique qu'on ne peut atteindre que des temps très courts. Cette difficulté est contournée dans [4] en considérant des données initiales proches de l'équilibre, au sens de (2).

##### 4.1. Mesure invariante et principe du maximum

Sous l'hypothèse (2), on peut en effet obtenir des bornes a priori globales en temps et essentiellement uniformes en  $N$  en utilisant la comparaison avec la mesure invariante

$$f_N^0(Z_N) \leq \mu_\lambda M_{N,\beta}$$

et le principe du maximum. On en déduit que

$$\sup_t f_N^{(s)}(t, Z_s) \leq \mu_\lambda M_{N,\beta}^{(s)}(Z_s) \leq \lambda^{-ds} \mu_\lambda (1 - C\varepsilon)^{-s} M_\beta^{\otimes s}(V_s).$$

Ces bornes permettent de contrôler la taille des arbres, et plus précisément de montrer que les arbres de grande taille sont de probabilité asymptotiquement nulle.

##### 4.2. Arbres à croissance super-exponentielle

On dit qu'un arbre de collision est admissible s'il a moins de  $n_k = a^k$  points de branchement sur l'intervalle  $[t - k\tau, t - (k-1)\tau]$ , où  $\tau$  est un paramètre à choisir suffisamment petit et  $a$  est une constante à choisir suffisamment grande.

On introduit par conséquent la décomposition

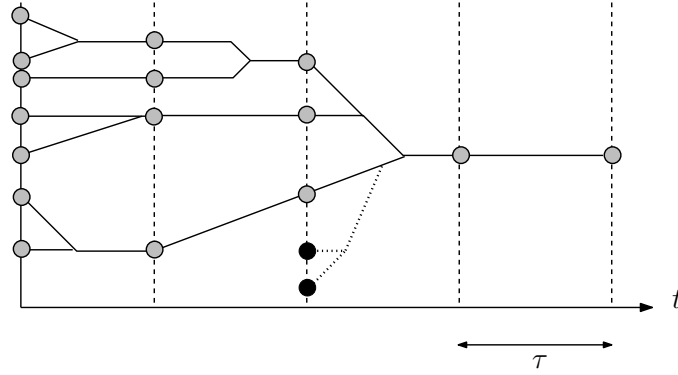


FIGURE 4. Arbres de collision admissible (gris) et non admissible (avec l'ajout des particules noires)

$$f_N^{(1,K)}(t) := \sum_{j_1=1}^{n_1-1} \dots \sum_{j_K=0}^{n_K-1} Q_{1,J_1}(\tau) Q_{J_1,J_2}(\tau) \dots Q_{J_{K-1},J_K}(\tau) f_N^{0(J_K)}$$

$$R_N^K(t) := \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=1}^{n_1-1} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} Q_{1,J_1}(\tau) \dots Q_{J_{k-2},J_{k-1}}(\tau) R_{J_{k-1},n_k}(t - k\tau, t - (k-1)\tau).$$

où on note  $J_k = \sum_{i=1}^k j_i$ .

La brique élémentaire ici est l'estimation de continuité à perte pour les opérateurs de collision

$$\|Q_{s,s+n}(t)f_{s+n}\|_{\varepsilon,s,\frac{\alpha}{2}} \leq e^{s-1} \left( \frac{C_d \lambda^d t}{\alpha^{\frac{d+1}{2}}} \right)^n \|f_{s+n}\|_{\varepsilon,s+n,\alpha}$$

dans les espaces à poids  $X_{\varepsilon,s,\alpha}$  définis par

$$\|f_s\|_{\varepsilon,s,\alpha} := \sup_{Z_s \in \mathcal{D}_\varepsilon^s} \left( \exp\left(\frac{\alpha}{2}|V_s|^2\right) |f_s(Z_s)| \right).$$

En choisissant  $\tau = \gamma/t$ , on obtient le contrôle suivant sur le terme de reste

$$\lambda^d \|R_N^K(t)\|_{L^\infty(\mathbf{T}_\lambda^d \times \mathbf{R}^d)} \leq C\mu\lambda\gamma^a.$$

En appliquant cette même estimation de continuité à perte pour contrôler les erreurs itérées dues au redressement des trajectoires, et en optimisant le paramètre  $\gamma$ , on obtient l'inégalité (6) pour des temps minorés par  $(\log \log N)^{\frac{a-1}{a}}$  où  $a$  peut être choisi arbitrairement grand.

*Remarque 2* : Notons que la convergence dans le théorème 2.1 est établie pour des temps presque de l'ordre de  $\log \log N$ . Cette limitation sur le temps semble optimale pour cette méthode, dans la mesure où les arbres de collision croissent exponentiellement en  $t$ , et que  $\log N$  est la taille critique des arbres au-delà de laquelle des transitions de phase peuvent apparaître (on s'attend alors à ce que des recollisions aient lieu avec probabilité strictement positive).

*Remarque 3* : L'approche du mouvement brownien que nous avons présentée s'inscrit dans la lignée des travaux en physique qui ont permis de mettre en évidence le mouvement Brownien à partir d'un système mécanique [7,12]. Dans ces travaux, la particule marquée (particule de pollen) est de masse très supérieure aux particules l'environnant. Son mouvement est donc régi par un grand nombre de déflections infinitésimales.

La situation que l'on considère ici est un peu différente puisque la particule marquée est de même taille que les autres et subit une déflection macroscopique à chaque impact. Néanmoins les méthodes utilisées

dans [4] pour l'analyse asymptotique semblent assez robustes pour pouvoir être étendues à des dynamiques où la particule marquée aurait une taille et une masse différente de celles des autres particules.

## Références

- [1] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore : *Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II : Convergence Proofs for the Boltzmann Equation*, Comm. Pure & Appl. Math **46** (1993), 667-753.
- [2] C. Bardos, R. Santos, R. Sentis, Diffusion approximation and computation of the critical size. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **284** (2) (1984), 617-649.
- [3] H. van Beijeren, O. E. Lanford, J.L. Lebowitz, H. Spohn, Equilibrium time correlation functions in the low-density limit. *J. Statist. Phys.*, **22**, no. 2 (1980), 237-257.
- [4] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond. The Brownian motion as the limit of a deterministic system of hard-spheres, *soumis* (2013).
- [5] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, *en préparation*.
- [6] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Springer Verlag, New York NY, 1994.
- [7] B. Duplantier, Le mouvement brownien, "divers et ondoyant", *Séminaire Poincaré*, (2005), 122-155.
- [8] R. DiPerna and P.-L. Lions, On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability, *Ann. of Math.* (2) **130** (1989), no. 2, p. 321-366.
- [9] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, B. Texier. From Newton to Boltzmann : the case of hard-spheres and short-range potentials, to appear in ZLAM.
- [10] F. Golse, L. Saint-Raymond. *The Incompressible Navier-Stokes Limit of the Boltzmann Equation for Hard Cutoff Potentials*, J. Math. Pures Appl. **91** (2009), 508-552.
- [11] D. Hilbert. *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, *Compte-Rendu du 2e Congrès International de Mathématiques, tenu à Paris en 1900*. Gauthier-Villars (1902), 58- 114.
- [12] J.P. Kahane. Le mouvement brownien : un essai sur les origines de la théorie mathématique. *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle. Sémin. Congr., Soc. Math. France* (1998), 123-155.
- [13] F. King, BBGKY hierarchy for positive potentials, *Ph.D. dissertation*, Dept. Mathematics, Univ. California, Berkeley, 1975.
- [14] T. Komorowski, C. Landim, S. Olla, *Fluctuations in Markov processes. Time symmetry and martingale approximation*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **345** Springer, Heidelberg, 2012.
- [15] O.E. Lanford, *Time evolution of large classical systems*, Lect. Notes in Physics **38**, J. Moser ed., 1-111, Springer Verlag (1975).
- [16] J. Lebowitz, H. Spohn, Steady state self-diffusion at low density. *J. Statist. Phys.* **29** (1982), 39-55.
- [17] H. Spohn, Boltzmann hierarchy and Boltzmann equation, in *Kinetic theories and the Boltzmann equation* (Montecatini, 1981), p. 207-220.
- [18] H. Spohn, Large scale dynamics of interacting particles, *Springer-Verlag* **174** (1991).
- [19] K. Uchiyama, Derivation of the Boltzmann equation from particle dynamics, *Hiroshima Math. J.* **18** (1988), no. 2, p. 245-297.